

Атомарные функции $h_a(x)$ и их свойства

Атомарные функции $h_a(x)$ $a > 1$ являются финитными решениями функционально-дифференциального уравнения

$$y'(x) = \frac{a^2}{2} (y(ax+1) - y(ax-1)), \quad (1)$$

где a — любое действительное число большее единицы.

Функции $h_a(x)$ широко используются для синтеза весовых окон в задачах цифровой обработки сигналов. При $a = 2$ функция $h_a(x)$ тождественно равна функции $\text{cr}(x)$.

Перечислим основные свойства $h_a(x)$.

1. $h_a(x) = 0$ при $|x| \geq \frac{1}{a-1}$.
2. $h_a(x) \equiv \frac{a}{2}$ при $|x| \leq \frac{a-2}{a(a-1)}$, $a \geq 2$.
3. Преобразование Фурье $h_a(x)$ имеет вид

$$F_a(p) = \prod_{k=1}^{\infty} \text{sinc}(p / a^k), \quad (2)$$

где через $\text{sinc}(p / a^k)$ обозначен $\sin(p / a^k) / (p / a^k)$,

и обращается в нуль в точках $a^k n\pi$, $n \neq 0$. В практических расчетах, если p невелико, достаточно ограничиться небольшим числом членов произведения (2), так как они быстро стремятся с ростом k к единице. С помощью (2) можно записать разложение $h_a(x)$ в ряд Фурье на интервале $|x| \leq (a-1)^{-1}$:

$$h_a(x) = (a-1) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} F_a((a-1)\pi k) \cos((a-1)\pi kx) \right).$$

4. Выражение вида (2) является характеристической функцией случайной величины $\xi(a) = \sum_{j=1}^{\infty} a^{-j} \xi_j$, где $\{\xi_j\}$ — последовательность независимых равномерно распределенных на отрезке $[-1; 1]$ случайных величин. Функция $h_a(x)$ представляет собой бесконечнократную свертку характеристических функций интервалов $[-a^{-k}; a^{-k}]$ и является плотностью случайной величины $\xi(a)$, следовательно, $\int_{-\infty}^{\infty} h_a(x) dx = 1$. Длины характеристических интервалов подчиняются закону геометрической прогрессии с основанием $a^{-1} < 1$.

5. Моменты $h_a(x)$ равны значениям производных ее преобразования Фурье (2) в нуле

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} h_a(x) dx = (-1)^k F_a^{(2k)}(0).$$

Кроме того, $F_a^{(2k)}(0) = (2k)! c_{2k}(a)$, где величины $c_{2k}(a)$ вычисляются по простым рекуррентным формулам

$$c_0(a) = 1, \quad c_{2k}(a) = \frac{1}{a^{2k} - 1} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^{k-j} c_{2j}(a)}{(2k - 2j + 1)!}, \quad k = 1, 2, \dots$$

6. При $a > 2$ функция $h_a(x)$ представляет собой многочлен на множестве полной меры, а на оставшемся нигде не плотном множестве меры нуль является неаналитической (ряд Тейлора либо состоит из конечного числа членов и к $h_a(x)$ не сходится, либо имеет нулевой радиус сходимости). Функции $h_a(x)$ при $a > 2$ могут быть причислены к сплайнам класса C^∞ .

7. Производные $h_a(x)$ выражаются через сдвиги-сжатия самой функции рекуррентно с помощью соотношения (1),

$$h_a^{(n)}(x) = 2^{-n} a^{\frac{n(n+3)}{2}} \sum_{k=1}^{2^n} \delta_k h_a \left(a^n x + \sum_{j=1}^n a^{j-1} (-1)^{p_j(k-1)} \right),$$

где $\delta_1 = 1$, $\delta_{2k} = -\delta_k$, $\delta_{2k-1} = \delta_k$, $k = 1, 2, \dots$, а $p_j(k)$ — число, стоящее в j -м разряде двоичного разложения числа k , то есть $p_j(k) = [k \cdot 2^j] \bmod 2$.

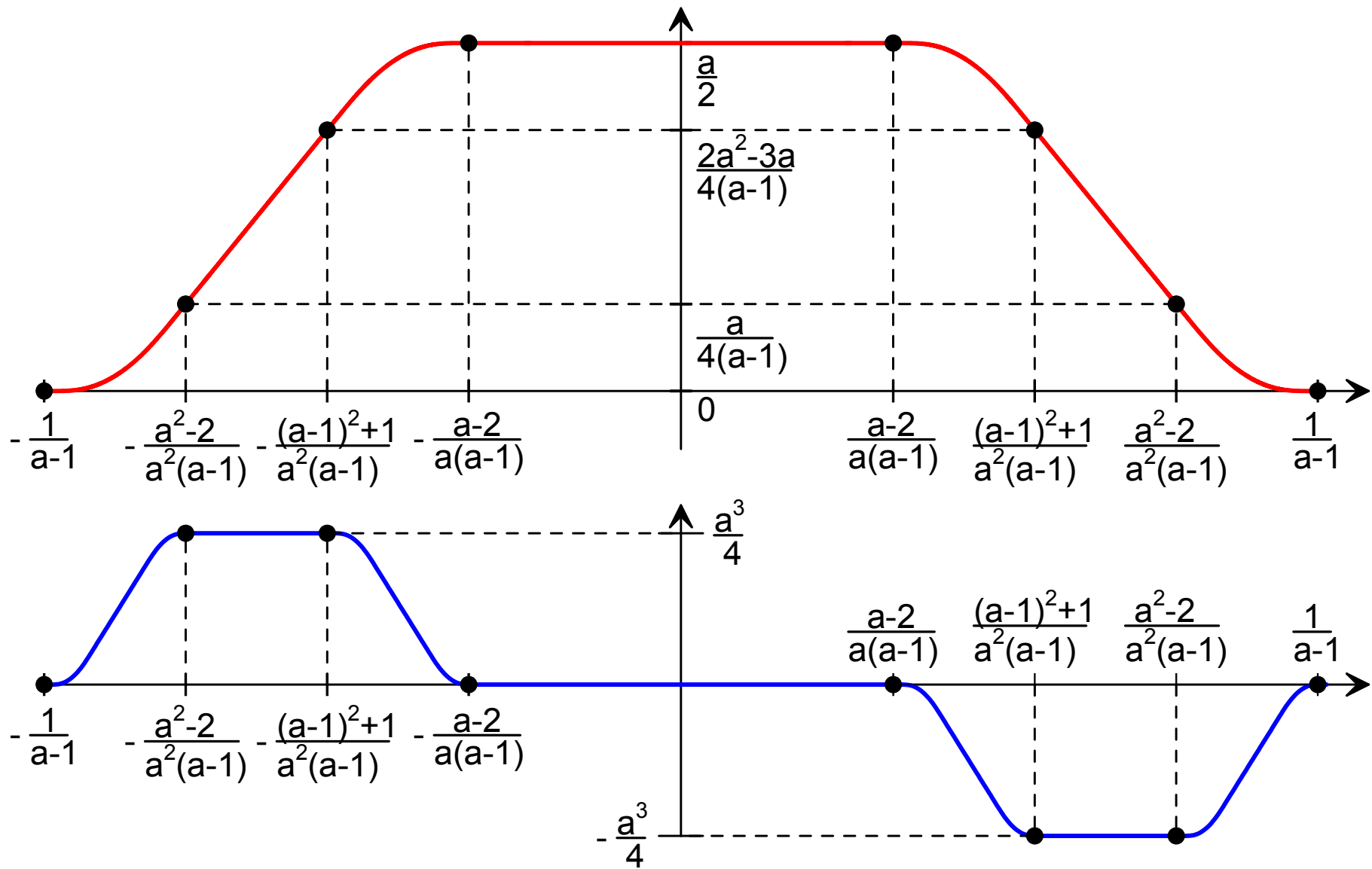


Рис. 1. Структура АФ $h_a(x)$ и ее производной при $a \geq 2$

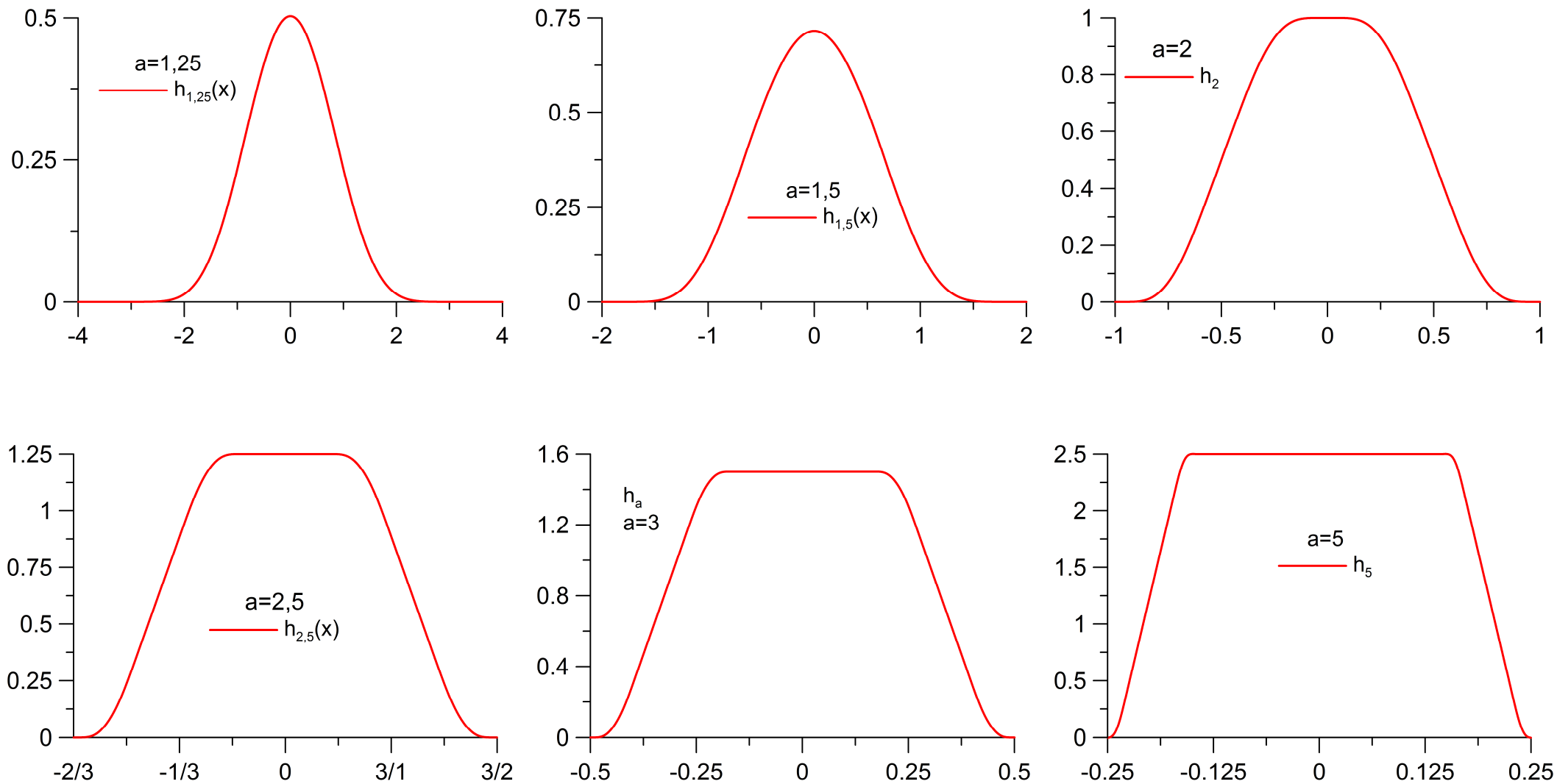


Рис. 2. Графики функций $h_a(x)$, $a = 1,25; 1,5; 2; 2,5; 3; 5$.

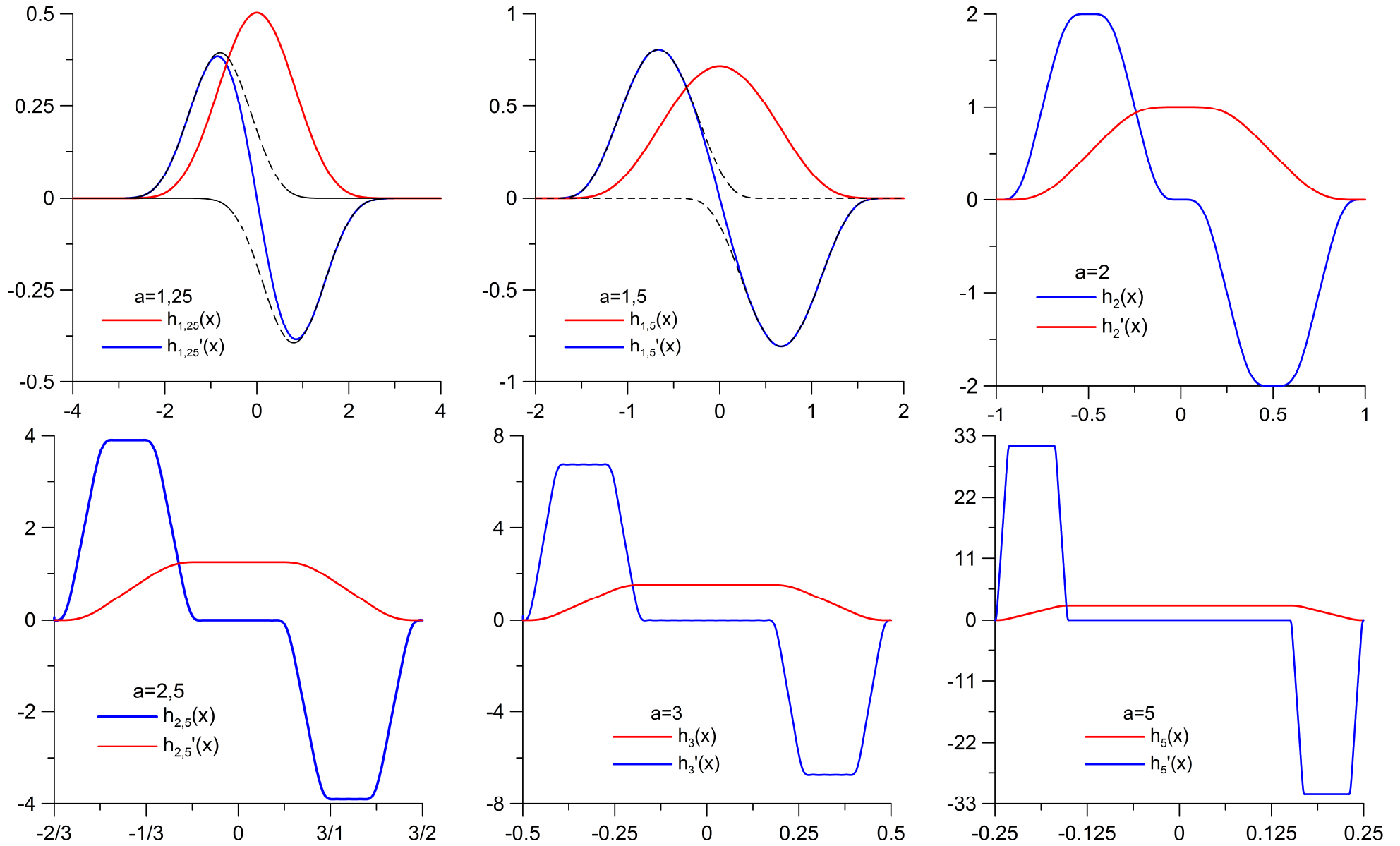


Рис. 3. Графики функций $h_a(x)$ и их производных, $a = 1,25; 1,5; 2; 2,5; 3; 5$.

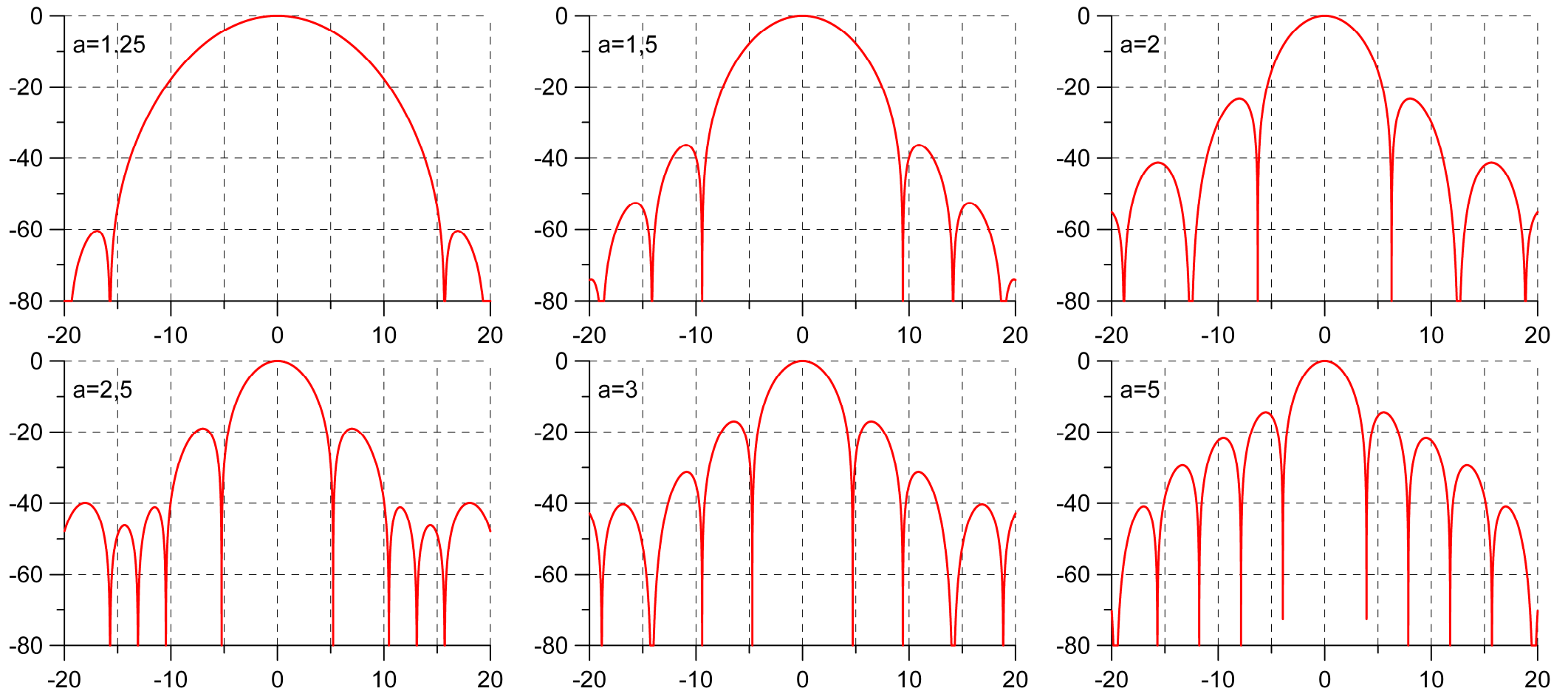
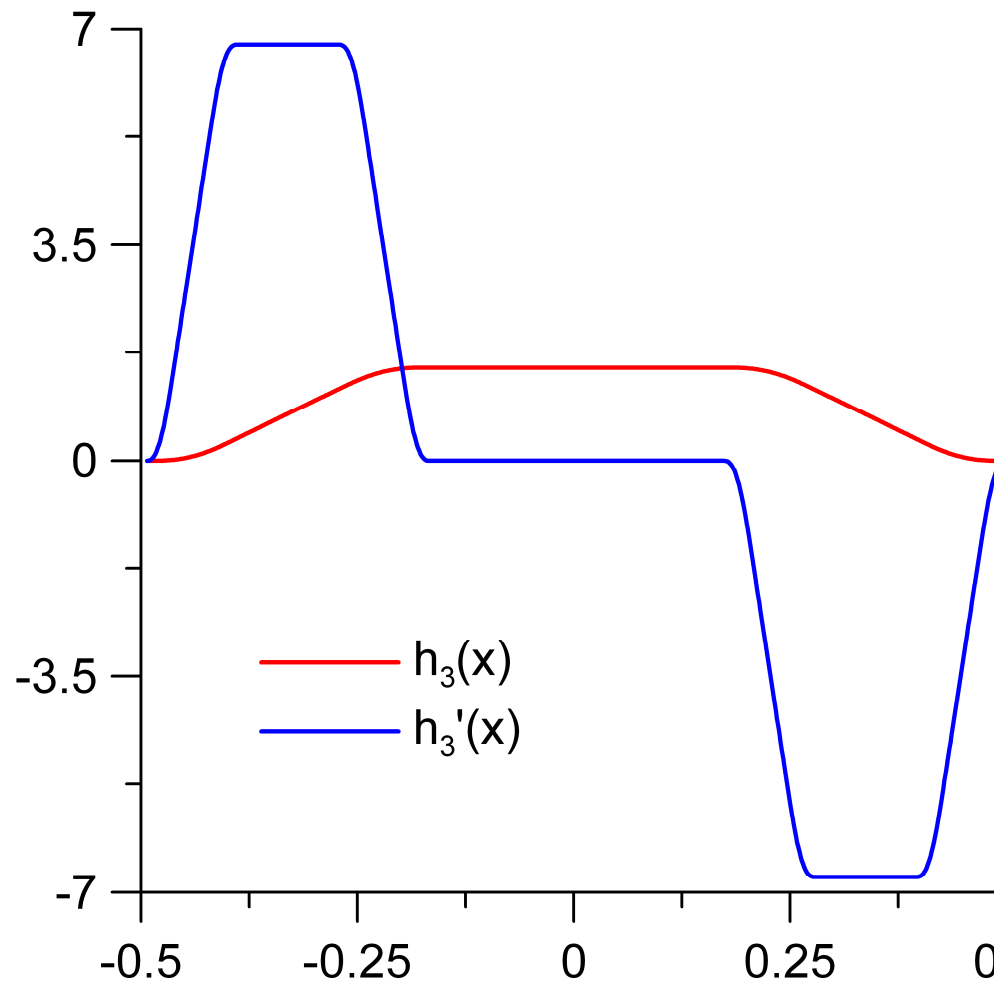


Рис. 4. Амплитудно частотные характеристики АФ $h_a(x)$, $a = 1,25; 1,5; 2; 2,5; 3; 5$
 $H = 20 \lg(F(\tilde{h}))$, где \tilde{h} - $h_a(x)$ растянутая на носитель $[-1,1]$ и нормированная на
 единичный интеграл; F – преобразование Фурье.

Атомарные функции $h_a(x)$



$$y' = \frac{a^2}{2} (y(ax+1) - y(ax-1))$$

$$\text{supp}(h_a) = \left[-\frac{1}{a-1}; \frac{1}{a-1} \right]$$

$$a = 3$$

$$y' = \frac{9}{2} (y(3x+1) - y(3x-1))$$

$$\text{supp}(h_3) = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right]$$

Интерполяция сигналов с использованием АФ $h_a(x)$.

Впервые использовать преобразования Фурье АФ $h_a(x)$ для интерполяции сигналов было предложено В.Ф. Кравченко и В.А. Рвачёвым. Более подробно вопросы такой аппроксимации на примере простейшей АФ $h_2(x)$ были рассмотрены Е.Г. Зелкиным и В.Ф. Кравченко. Для интерполяции функции $f(x)$ в точках $2\pi n$, где n — целое, ими был предложен ряд следующего вида:

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(2\pi k) \prod_{n=1}^{\infty} \text{sinc}[(x - 2\pi k) / 2^n]. \quad (3)$$

Сходимость ряда доказана на примере преобразования Фурье АФ $h_a(x)$, которая при $a = 2$ совпадает с АФ $h_2(x)$.

Теорема 1 Ряд

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta) F_a \left[\frac{a\pi}{\Delta} (x - k\Delta) \right], \quad (4)$$

где $a > 1$, $\Delta > 0$, сходится, если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей числовой оси, т.е. $f(x) \in L_1[-\infty; \infty]$.

Доказательство.

$$F_a \left[\frac{a\pi}{\Delta} (x - k\Delta) \right] = \int_{-\infty}^{\infty} h_a(z) \exp \left(iz \frac{a\pi}{\Delta} (x - k\Delta) \right) dz.$$

Тогда

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ia\pi xz / \Delta) h_a(z) \exp(-ia\pi kz) dz.$$

Разложим функцию $\exp(ia\pi xz / \Delta)$ в ряд Тейлора по переменной z

$$\exp(ia\pi xz / \Delta) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ia\pi x / \Delta)^m}{m!} z^m.$$

Выражение для $\tilde{f}(x)$ принимает вид

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ia\pi x / \Delta)^m}{m!} \int_{-\infty}^{\infty} z^m h_a(z) \exp(-ia\pi kz) dz.$$

Обозначим $b_{k,m} = \int_{-\infty}^{\infty} z^m h_a(z) \exp(-ia\pi kz) dz$. Имеет место оценка

$$|b_{k,m}| \leq |\xi|^m h_a(0) \int_{-1/(a-1)}^{1/(a-1)} |\exp(-ia\pi kz)| dz = \frac{2h_a(0)}{a-1} |\xi|^m = C |\xi|^m,$$

где $\xi \in [-(a-1)^{-1}, (a-1)^{-1}]$.

$$|b_{k,m}| \leq |\xi|^m h_a(0) \int_{-1/(a-1)}^{1/(a-1)} |\exp(-ia\pi kz)| dz = \frac{2h_a(0)}{a-1} |\xi|^m = C |\xi|^m,$$

где $\xi \in [-(a-1)^{-1}, (a-1)^{-1}]$.

Отсюда

$$\begin{aligned} |\tilde{f}(x)| &\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f(k\Delta)| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|ia\pi x|^m}{m!} |b_{k,m}| = \\ &= C \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|a\pi x|^m}{m!} |\xi|^m \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f(k\Delta)|. \end{aligned}$$

Поскольку ряд Тейлора функции e^x абсолютно сходится на всей числовой оси, то для того, чтобы ряд (4) сходился, необходима сходимость $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f(k\Delta)|$. Эта сходимость будет иметь место при $f(x) \in L_1[-\infty, \infty]$. Теорема доказана.

Следовательно, ряд (4), состоящий из целых функций конечной степени, также представляет собой целую функцию конечной степени. Легко видеть, что в частном случае, при $a = 2$, $\Delta = 2\pi$ ряд (4) совпадает с рядом Е.Г. Зелкина–В.Ф. Кравченко (3). Ниже устанавливаются условия, при которых ряд (4) точно равен функции $f(x)$ на всей числовой оси.

Теорема 2. Пусть непрерывная функция $f(x)$ имеет финитный спектр ($\text{supp } \hat{f}(p) = [-\Omega; \Omega]$). Тогда справедливо точное разложение

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta) F_a \left[\frac{a\pi}{\Delta} (x - k\Delta) \right], \quad (5)$$

где $F_a(x)$ определяется выражением (2) и выполняются условия

$$a > 2, \quad \Delta \leq \frac{\pi}{\Omega} \cdot \frac{a-2}{a-1}, \quad (6)$$

или

$$\Delta < \frac{\pi}{\Omega}, \quad a \geq \frac{2 - \Delta\Omega / \pi}{1 - \Delta\Omega / \pi}. \quad (7)$$

Доказательство. Определим вспомогательную функцию

$$\varphi(x) \equiv f(x) \prod_{n=2}^{\infty} \text{sinc} \left(\frac{\pi a}{\Delta a^n} (z - x) \right), \quad z \in \mathbb{R}.$$

Эта функция имеет финитный спектр и $\text{supp } \hat{\varphi}(p) = [-\alpha; \alpha]$, где

$$\alpha = \Omega + \frac{\pi}{\Delta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n} = \pi \left(\frac{\Omega}{\pi} + \frac{1}{\Delta(a-1)} \right).$$

Чтобы $\varphi(x)$ могла быть разложена в ряд Котельникова, должно соблюдаться условие $\alpha \leq \pi/\Delta$. Следовательно, необходимо выполнение неравенств (6), (7). В этом случае

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(k\Delta) \operatorname{sinc} \left[\frac{\pi}{\Delta} (x - k\Delta) \right] = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ f(k\Delta) \prod_{n=2}^{\infty} \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi a}{\Delta a^n} (z - k\Delta) \right) \right\} \operatorname{sinc} \left[\frac{\pi}{\Delta} (x - k\Delta) \right].\end{aligned}$$

Пусть $x = z$, тогда

$$\varphi(z) = f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta) \prod_{n=1}^{\infty} \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi a}{\Delta a^n} (z - k\Delta) \right).$$

Последнее выражение представляет собой требуемое разложение (5) с точностью до обозначения независимой переменной. Теорема доказана.

Следствие. В случае $f(x) \equiv 1$ получаем $\Omega = 0$ ($\operatorname{supp} \hat{f}(p) = \{0\}$), т.е. $\hat{f}(p) = \delta(p)$, а для любых $\Delta > 0$, $a \geq 2$ имеет место разложение единицы

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \prod_{n=1}^{\infty} \operatorname{sinc} \left[\frac{\pi}{\Delta a^{n-1}} (x - k\Delta) \right] = 1. \quad (8)$$

Если $f(x)$ не удовлетворяет условиям теоремы 2, то ряд (5) можно рассматривать как приближенное представление функции. При этом в точках $k\Delta$ аппроксимация будет точной.

Перед тем как перейти к рассмотрению применения нового способа интерполяции сигналов в задачах синтеза антенн, укажем на некоторые особенности его численной реализации. Во-первых, при практических вычислениях приходится ограничиваться конечным числом членов произведения в правой части (2)

$$F_a(p) = \prod_{k=1}^M \text{sinc}(p / a^k). \quad (9)$$

Проведя рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 2, можно убедиться, что и в этом случае будет иметь место точное разложение (5), а вместо условия (6) должны выполняться более слабые ограничения

$$a(1 + a^{-M}) > 2, \quad \Delta \leq \frac{\pi}{\Omega} \cdot \frac{a(1 + a^{-M}) - 2}{a - 1}. \quad (10)$$

Минимально возможные значения a для различного числа членов произведения M определяются из решения трансцендентного уравнения

$$a(1 + a^{-M}) - 2 = 0.$$

Очевидно, что при $M=1$ как частный случай получается ряд Котельникова, а в пределе при $M \rightarrow \infty$ ряд (5).

Второй проблемой является необходимость ограничиться конечным числом членов ряда (5)

$$\tilde{f}_N(x) = \sum_{k=-N}^N f(k\Delta) F_a \left[\frac{a\pi}{\Delta} (x - k\Delta) \right].$$

Эффект усечения в данном случае не будет играть такой существенной роли, как при аппроксимации рядом Котельникова, поскольку уровень боковых лепестков у функций вида (2), (9) значительно ниже, чем у функции $\text{sinc}(p)$.